

2.1 Ορμή και Δύναμη

2.1.1 Ορισμοί

Η ορμή \vec{p} ενός σώματος είναι το διάνυσμα της ταχύτητας πολλαπλασιασμένο επί τη μάζα m του σώματος:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (2.1)$$



Και όπως είναι εμφανές από τον ορισμό, η ορμή \vec{p} έχει την κατεύθυνση της ταχύτητας \vec{v} κάθε στιγμή.

2.1.2 Ο β' νόμος του Νεύτωνα

Αν δεν ασκείται δύναμη στο σώμα $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ τότε σύμφωνα με τον 1ο Νόμο της κίνησης το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα \vec{v} .

Αν όμως ασκηθεί δύναμη τότε αλλάζει η ταχύτητα \vec{v} και η ορμή \vec{p} .

Ο Νεύτωνας μας έδωσε τον νόμο της αλλαγής:

$$\Sigma\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \quad (2.2)$$

Δηλαδή: Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι η συνισταμένη δύναμη.

Η εξίσωση (2.2) είναι η γενίκευση της γνωστής σχέσης $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ με το πλεονέκτημα ότι ισχύει και όταν μεταβάλλεται η μάζα των σωμάτων.

Θυμίζουμε ότι:

- Ο 2ος Νόμος ισχύει για μικρές ταχύτητες $v \ll c$ όπου $c = 3 \cdot 10^8 \text{m/s}$ είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό.
- Ο 2ος Νόμος ισχύει σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς, δηλαδή σε συστήματα στα οποία ισχύει ο 1ος Νόμος.

2.1.3 Ορμή και κινητική ενέργεια

Μία πολύ ενδιαφέρουσα σχέση της ορμής με την κινητική ενέργεια μπορεί να βρεθεί ως εξής:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow K = \frac{1}{2} \frac{m^2v^2}{m}$$

$$K = \frac{p^2}{2m} \quad (2.3)$$

Η οποία είναι πολύ χρήσιμη σε μερικές περιπτώσεις και καλό είναι να την ξέρουμε (με την απόδειξή της)

2.1.4 Η μεταβολή ορμής στην πράξη

Κίνηση σε μία ευθεία

Για σώμα που κινείται σε μία ευθεία γραμμή (έστω άξονας $x'x$) βρίσκουμε την μεταβολή της ορμής του με τον παρακάτω τρόπο:

- Επιλέγουμε μία θετική φορά στον άξονα.
- Στον τύπο $\Delta p = p_2 - p_1$ βάζουμε τις ορμές p_2 και p_1 με τις αλγεβρικές τους τιμές, δηλαδή ως $+mv_1$ αν η ταχύτητα έχει τη θετική φορά, ή $-mv_1$ αν η ταχύτητα έχει την αρνητική φορά. Αντίστοιχα για την p_2 .
- Αν η μεταβολή της ορμής Δp έχει θετική αλγεβρική τιμή τότε το διάνυσμα $\Delta \vec{p}$ έχει τη θετική φορά του άξονα $x'x$. Αλλιώς, αν έχει αρνητική τιμή, τότε το διάνυσμα έχει την αρνητική φορά του άξονα.

Παραδείγματα:

A. Σφαίρα χτυπάει σε τοίχο με ταχύτητα $\vec{v}_1 = \vec{v}$ και επιστρέφει με αντίθετη ταχύτητα $\vec{v}_2 = -\vec{v}$.



$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \text{ και αλγεβρικά:}$$

$$\Delta p = p_2 - p_1 \Leftrightarrow$$

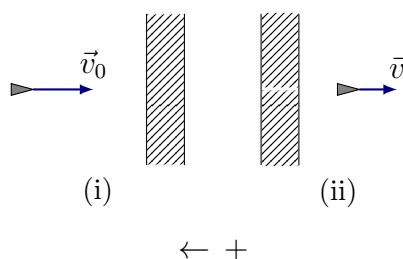
$$= (-mv) - (+mv) \Leftrightarrow$$

$$= -mv - mv \Leftrightarrow$$

$$\Delta p = -2mv \quad (2.4)$$

Άρα η μεταβολή της ορμής $\Delta \vec{p}$ είναι διάνυσμα προς τα αριστερά. (Και συνεπώς και η δύναμη που δέχθηκε η μπάλα είναι προς τα αριστερά).

B. Βλήμα διαπερνά ξύλινο τοίχο. Αρχικά έχει ταχύτητα \vec{v}_0 και μετά έχει \vec{v} , με $v < v_0$.



Εδώ ας θεωρήσουμε θετική την φορά προς τα αριστερά.

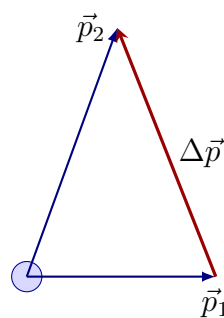
$$\begin{aligned}
 \Delta \vec{p} &= \vec{p} - \vec{p}_0 \text{ και αλγεβρικά:} \\
 \Delta p &= p - p_0 \Leftrightarrow \\
 &= (-mv) - (-mv_0) \Leftrightarrow \\
 &= -mv + mv_0 \Leftrightarrow \\
 \Delta p &= m(v_0 - v) \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

Αφού η μεταβολή της ορμής είναι θετική άρα το διάνυσμά της έχει την θετική φορά του σχήματος δηλαδή προς τα αριστερά (όπως και η δύναμη που δέχεται το βλήμα).

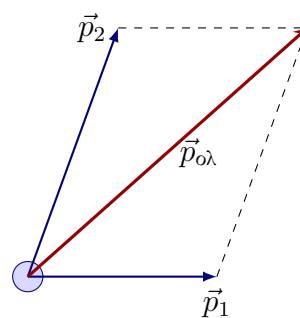
Μεταβολή ορμής στο επίπεδο

Όταν αλλάζει η κατεύθυνση της ορμής τότε τα πράγματα είναι πιο πολύπλοκα.

Γενικά η μεταβολή $\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ είναι η διαφορά δύο διανυσμάτων. Από τα μαθηματικά (ή από τη φυσική...) ξέρουμε ότι:



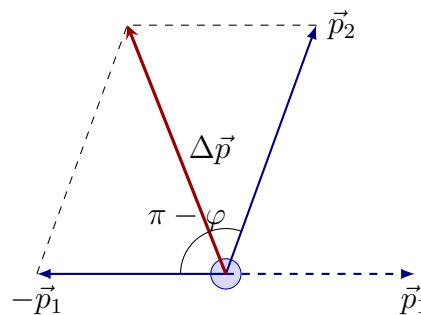
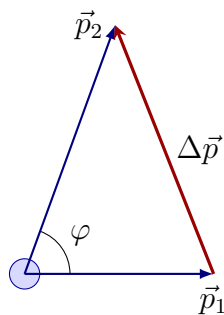
Αφαίρεση διανυσμάτων



Πρόσθεση διανυσμάτων

Η αφαίρεση διανυσμάτων είναι ένα διάνυσμα από το τέλος του αρχικού μέχρι το τέλος του τελικού διανύσματος, όπως στο παραπάνω σχήμα.

Μπορούμε πάντα να κάνουμε την αφαίρεση $\vec{p}_2 - \vec{p}_1$ ως πρόσθεση $\vec{p}_2 + (-\vec{p}_1)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

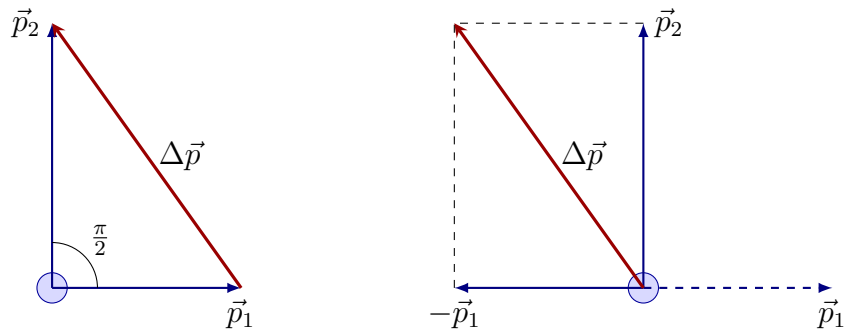


Για το μέτρο της $\Delta \vec{p}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον νόμο συνημιτόνων:

$$\Delta p = \sqrt{p_2^2 + (p_1)^2 + 2p_1p_2 \text{ συν}(\pi - \varphi)} \tag{2.6}$$

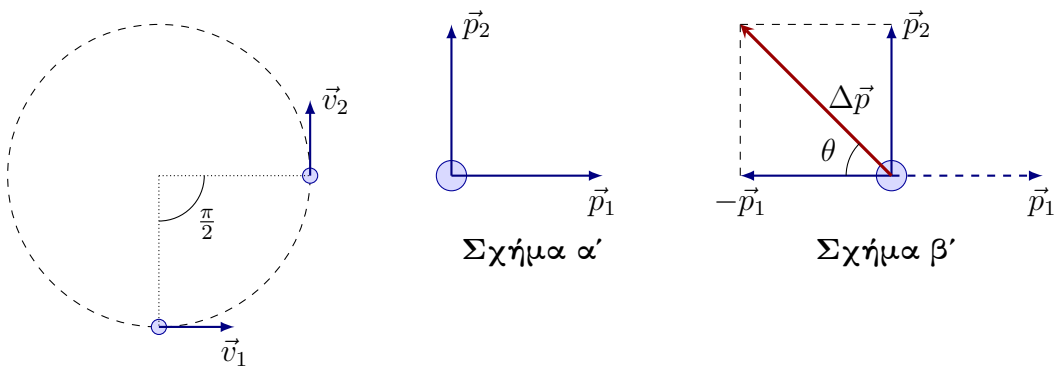
Ή να αναλύσουμε τα διανύσματα $-\vec{p}_1, \vec{p}_2$ σε κατάλληλους ορθογώνιους άξονες x, y .

Στην πράξη θα συναντήσουμε την περίπτωση όπου τα διανύσματα είναι κάθετα, οπότε μπορούμε να δουλέψουμε με το γνωστό μας Πυθαγόρειο θεώρημα:



Παράδειγμα

Μεταβολή ορμής σε ομαλή κυκλική κίνηση για χρόνο $\frac{T}{4}$.



Σε χρόνο $\frac{T}{4}$ το σώμα γράφει γωνία $\frac{\pi}{2}$ και η αρχική ορμή είναι κάθετη στην τελική, ενώ τα μέτρα τους είναι ίσα ($p_1 = p_2 = mv$). Κατασκευάζουμε τα σχήματα α' και β':

$$\Delta \vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 \Leftrightarrow \Delta \vec{p} = \vec{p}_2 + (-\vec{p}_1)$$

$$\Delta p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \Leftrightarrow$$

$$\Delta p = \sqrt{2p_1^2} \Leftrightarrow$$

$$\Delta p = \sqrt{2}p_1 \Leftrightarrow$$

$$\Delta p = \sqrt{2}mv$$

(2.7)

και η γωνία θ βρίσκεται με την εφαπτομένη $\varepsilon\phi \theta = \frac{p_2}{|-p_1|} = 1$, άρα $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad σε σχέση με την κατεύθυνση της $-\vec{p}_1$, ή $\frac{3\pi}{4}$ σε σχέση με την κατεύθυνση της \vec{p}_1 .

Μεταβολή ορμής από τον β' νόμο

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα $\Sigma \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$ μπορεί να λυθεί ως προς $\Delta \vec{p}$:

$$\Delta \vec{p} = \Sigma \vec{F} \Delta t$$

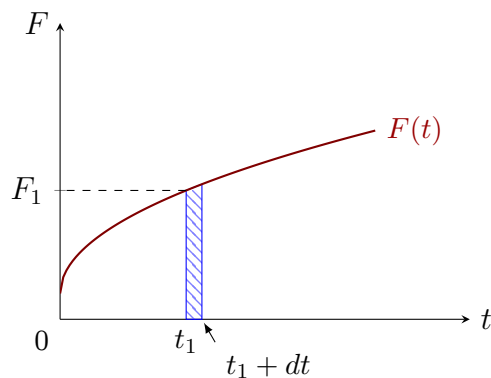
(2.8)

(το γινόμενο $\vec{F}\Delta t$ ονομάζεται ώθηση)

Αυτό μας δίνει ένα ακόμα τρόπο να υπολογίζουμε την μεταβολή της ορμής, σε κάποιες περιπτώσεις (όπως για παράδειγμα σε μία οριζόντια βολή).

Μεταβολή ορμής από το διάγραμμα $F = f(t)$

Έστω ένα διάγραμμα δύναμης-χρόνου:



Την χρονική στιγμή t_1 η δύναμη έχει τιμή F_1 , ενώ λίγο μετά, την χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + dt$ η δύναμη έχει αλλάξει λίγο. Όταν ο χρόνος dt τείνει στο μηδέν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η δύναμη μένει σχεδόν ίδια (δηλαδή F_1). Τότε το εμβαδό της γραμμοσκιασμένης στήλης είναι $F_1 dt$ και ισούται με τη μεταβολή της ορμής dp στο χρονικό διάστημα dt .

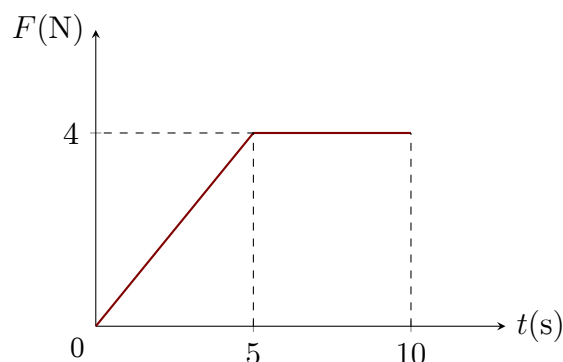
Αθροίζοντας όλες τις παρόμοιες στήλες μπορούμε να καλύψουμε το εμβαδό από οποια χρονική στιγμή έως οποιαδήποτε άλλη θέλουμε, βρίσκοντας την αντίστοιχη μεταβολή της ορμής $\Delta p = \sum dp$.

Το τελικό συμπέρασμα είναι ότι **στο διάγραμμα $F = f(t)$ το εμβαδό μας δίνει την μεταβολή της ορμής Δp** (και να δώσουμε τα εύσημά μας [κοινώς kudos] στον παππού Νεύτωνα και τον προπάππου μας Αρχιμήδη...)

Στις περιπτώσεις όπου το εμβαδό υπολογίζεται εύκολα (χωρίς ολοκλήρωση) τότε η μέθοδος αυτή μας δίνει τη μεταβολή της ορμής με τον υπολογισμό ενός απλού εμβαδού. Π.χ.:

Παράδειγμα:

Έστω ένα σώμα μάζας $m = 2\text{kg}$ που την χρονική στιγμή $t = 0$ κινείται σε οριζόντιο επίπεδο ευθύγραμμα ομαλά με ταχύτητα $v_0 = 5\text{m/s}$ και τότε δέχεται οριζόντια δύναμη ίδιας κατεύθυνσης με την ταχύτητά του, της οποίας δύναμης το μέτρο δίνεται από το παρακάτω διάγραμμα:



Ζητάμε τις ταχύτητες του σώματος τις χρονικές στιγμές $t_1 = 5\text{s}$ και $t_2 = 10\text{s}$.

Από $0 \rightarrow 5\text{s}$ η μεταβολή της ορμής υπολογίζεται από το εμβαδό του τριγώνου (εύκολα) $\Delta p_1 = 10\text{kgm/s}$. Επομένως η μεταβολή της ταχύτητας $\Delta v_1 = \Delta p_1/m = 5\text{m/s}$. Επομένως η ταχύτητα θα είναι $v_1 = v_0 + \Delta v_1$ ή $v_1 = 10\text{m/s}$. Και παρόμοια για το $5\text{s} \rightarrow 10\text{s}$