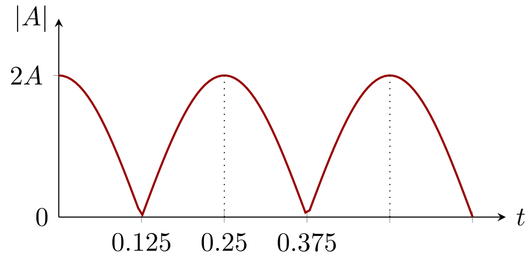
1.1 Θέματα στις Ταλαντώσεις (με απαντήσεις)

Επιμέλεια: Γιώργος Χ. Παπαδημητρίου, Νοέμβριος 2020, Covid-19 Lockdown

1.1.1 Ερωτήσεις

1. Σώμα μετέχει σε δύο ταλαντώσεις της μορφής

$$x_1 = A\,\eta\mu\,\omega_1 t \qquad (1.1)$$
$$x_2 = A\,\eta\mu\,\omega_2 t \qquad (1.2)$$

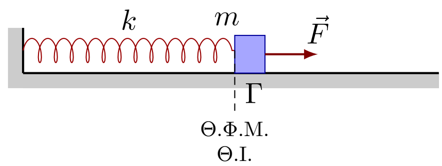


με συχνότητες $f_1 = 38\text{Hz}$ και $f_2 > f_1$.
Στο παρακάτω διάγραμμα απεικονίζεται το πλάτος της περιοδικής κίνησης του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο.
Στο χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους το σώμα περνάει από τη θέση ισορροπίας του:

(α΄) 10 φορές. (β΄) 20 φορές. (γ΄) 40 φορές.

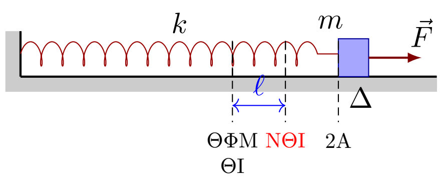
Λύση:
Η περίοδος του διακροτήματος που παράγεται είναι $0.375 - 0.125 = 0.25\,\text{s}$. Όμως $T = \frac{1}{f_2 - f_1} = 0.25$ άρα $f_2 - f_1 = 4 \Leftrightarrow f_2 = 42$ Hz.
Η συχνότητα ταλάντωσης είναι $\bar{\omega} = \frac{\omega_1+\omega_2}{2} \Leftrightarrow \bar{f} = f_{\tau\alpha\lambda} = \frac{f_1+f_2}{2} = 40\text{Hz}$ και η περίοδος $T_{\tau\alpha\lambda} = \frac{1}{f} = \frac{1}{40}\text{s}$.
Ο αριθμός των ταλαντώσεων που εκτελεί σε μία περίοδο διακροτήματος είναι $N = \frac{T_\delta}{T_{\tau\alpha\lambda}} = \frac{0.25}{1/40} = 0.25 \cdot 40 = 10$ ταλαντώσεις και σε κάθε ταλάντωση περνάει 2 φορές από τη θέση ισορροπίας άρα 20 φορές. Σωστό το (β).

2. Στο σώμα m του σχήματος που είναι δεμένο σε ελατήριο k και ισορροπεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ασκείται ξαφνικά δύναμη F μέχρι την χρονική στιγμή που το σώμα σταματάει στιγμιαία. Η ταχύτητα με την οποία θα περάσει το σώμα από τη θέση ισορροπίας του μετά τον μηδενισμό της δύναμης F έχει μέτρο:



(α΄) $\dfrac{2F}{\sqrt{mk}}$ (β΄) $\dfrac{F}{\sqrt{mk}}$ (γ΄) $\dfrac{F}{\sqrt{2mk}}$

Λύση:
Με την επίδραση της σταθερής δύναμης F το σύστημα θα εκτελέσει ταλαντωση (μόνο την μισή μέχρι να μηδενιστεί η δύναμη), ξεκινώντας από την αριστερή ακραία θέση (την ΘΦΜ και ΘΙ χωρίς τη δύναμη F).



Η Θέση ισορροπίας *με την δύναμη* F είναι μετατοπισμένη προς τα δεξιά από την αρχική θέση κατά $\Sigma F = 0 \Leftrightarrow k\ell = F \Leftrightarrow \ell = F/k$. Το σώμα όμως θα φτάσει στο σημείο Δ όπου μηδενίζεται η ταχύτητά του (και η εξωτερική δύναμη F), το οποίο είναι η δεξιά ακραία θέση της ταλάντωσης (με την F).
Όταν καταργηθεί η F τότε η θέση ισορροπίας γίνεται ξανά η ΘΦΜ, όμως το σώμα βρίσκεται χωρίς ταχύτητα στο Δ που απέχει από το Γ απόσταση $2\ell = \frac{2F}{k}$, οπότε αυτό είναι το πλάτος της

τελικής ταλάντωσης του σώματος. Μετά από όλα αυτά (ουφ) μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα με την οποία θα περάσει από το Γ, ως $\upsilon_{\max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}}\frac{2F}{k}$ οπότε τελικά $\upsilon_{\max} = \dfrac{2F}{\sqrt{mk}}$. Σωστό το (α).

3. Ένα σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση για την οποία η εξίσωση της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι:

$$x = A\,\text{ημ}(\omega t) + \sqrt{3}A\,\text{ημ}(\omega t + 3\pi/2)$$

Η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης αυτής θα είναι ίση με :

(α΄) $\upsilon_{\max} = \omega A$ (β΄) $\upsilon_{\max} = 2\omega A$ (γ΄) $\upsilon_{\max} = \sqrt{3}\omega A$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση:

Οι ταλαντώσεις έχουν ίσες συχνότητες οπότε $A' = \sqrt{A^2 + (\sqrt{3}A)^2 + 2A\sqrt{3}A\,\text{συν}(3\pi/2)}$ και μετά από πράξεις $A' = 2A$, (αφού $\text{συν}(3\pi/2) = 0$). Άρα $\upsilon_{\max} = \omega 2A$, σωστό το (β).

4. Σώμα m δεμένο σε ελατήριο k κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση σε αέρα με μικρό συντελεστή απόσβεσης b και εξωτερική δύναμη της μορφής $F_\delta = F_0\,\text{συν}\,2\pi f_\delta t$. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι το μέγιστο δυνατό. Αν αντικαταστήσουμε το σώμα με άλλο διπλάσιας μάζας, τότε για να έχουμε πάλι μέγιστο πλάτος ταλάντωσης πρέπει η συχνότητα του διεγέρτη:

(α΄) να μείνει σταθερή. (β΄) να αυξηθεί κατά 30% (γ΄) να μειωθεί κατά 30%

Δίνεται ότι $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$

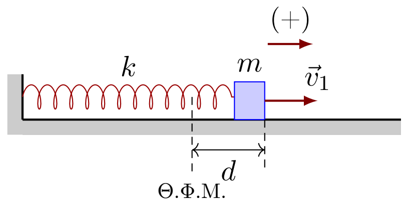
Λύση:

Το σύστημα αρχικά είναι σε συντονισμό, επομένως $f_\delta = f_0$. Με την αντικατάσταση του σώματος με άλλο μάζας $2m$, η νέα ιδιοσυχνότητα γίνεται $f_0' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{2m}} = \frac{1}{\sqrt{2}}f_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}f_0 \approx 0{,}7f_0$. Για να έχουμε πάλι μέγιστο πλάτος (συντονισμό) πρέπει η συχνότητα του διεγέρτη να μειωθεί από $f_0 \to f_0'$ ή $\Delta f_\delta = f_0' - f_0$ και το ποσοστό μεταβολής της είναι:

$\dfrac{\text{Μεταβολή}}{\text{Αρχική τιμή}}100\% = \dfrac{\Delta f}{f_0}100\% = \dfrac{0{,}7f_0 - f_0}{f_0}100\% = \dfrac{-0{,}3f_0}{f_0}100\% = -30\%$

Άρα σωστό το (γ).

5. Σώμα m δεμένο σε ελατήριο k κρατείται σε απομάκρυνση d και βάλλεται με ταχύτητα $\upsilon_1 = \omega d$ προς τα δεξιά όπως στο σχήμα. Η εξίσωση απομάκρυνσης της ταλάντωσης είναι:

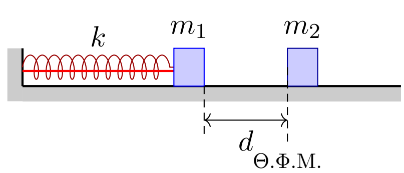


(α΄) $x = \sqrt{2}d\,\text{ημ}(\omega t + \frac{\pi}{4})$ (β΄) $x = \sqrt{2}d\,\text{ημ}(\omega t + \frac{3\pi}{4})$ (γ΄) $x = 2d\,\text{ημ}(\omega t + \frac{\pi}{4})$

Λύση:

Ενέργειες ταλάντωσης στην θέση εκτόξευσης:
$\frac{1}{2}m(\omega d)^2 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Leftrightarrow m\frac{k}{m}d^2 + kd^2 = kA^2 \Leftrightarrow 2d^2 = A^2 \Leftrightarrow A = d\sqrt{2}$
Αρχική φάση: $+d = d\sqrt{2}\,\text{ημ}(\varphi_0) \Leftrightarrow \text{ημ}(\varphi_0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ ή $\varphi_0 = \frac{3\pi}{4}$
Δεκτή η $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ επειδή $\upsilon_1 > 0$, άρα $x = \sqrt{2}d\,\text{ημ}(\omega t + \frac{\pi}{4})$
Σωστή η (α)

6. Σώμα m_1 δεμένο σε ελατήριο k κρατείται με νήμα σε απομάκρυνση d. Στη θέση ισορροπίας του βρίσκεται ακίνητο δεύτερο σώμα $m_2 = 3m_1$. Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα. Η κρούση των σωμάτων είναι κεντρική και πλαστική. Το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι:

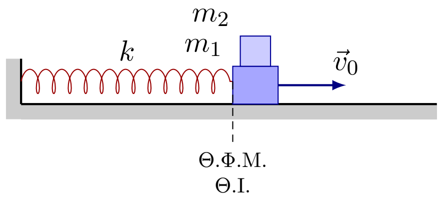


(α′) $A' = \frac{d}{4}$ (β′) $A' = \frac{d}{3}$ (γ′) $A' = \frac{d}{2}$

Η θέση που κόβεται το νήμα είναι η ακραία θέση της ταλάντωσης του m_1 (όση ταλάντωση προλάβει να κάνει τέλος πάντων!) γιατί εκεί έχει ταχύτητα μηδέν, άρα $A = d$. Η θέση της σύγκρουσης είναι η θέση ισορροπίας του m_1 άρα φτάνει εκεί με μέγιστη ταχύτητα $v_1 = \omega A \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}}d$.

Α.Δ.Ο.: $m_1 v_1 = (m_1 + 3m_1)v_\sigma \Leftrightarrow v_\sigma = \frac{1}{4}v_1 \Leftrightarrow v_\sigma = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{m}}d$
Όμως το συσσωμάτωμα βρίσκεται στην ΘΙ της νέας ταλάντωσης, άρα: $v'_{\max} = v_\sigma$
$v'_{\max} = \omega' A' \Leftrightarrow \frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{m}}d = \sqrt{\frac{k}{4m_1}}A' \Leftrightarrow \frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{m}}d = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m_1}}A' \Leftrightarrow A' = \frac{d}{2}$
Σωστή η (γ)

7. Σώμα m_1 είναι δεμένο σε ελατήριο k και πάνω σε αυτό βρίσκεται δεύτερο σώμα m_2, το οποίο παρουσιάζει συντελεστή στατικής τριβής μ. Όταν το σύστημα των m_1, m_2 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του έχει ταχύτητα v_0. Η τιμή της ταχύτητας v_0 ώστε το m_2 να μήν ολισθαίνει πάνω στο m_1 πρέπει να είναι:



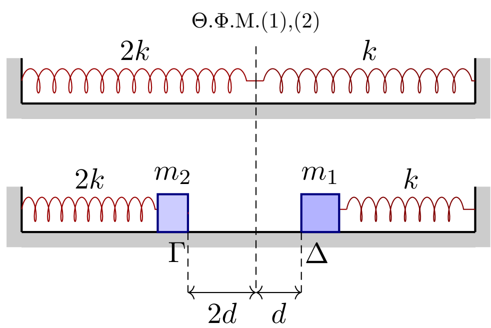
(α′) $v_0 \leq \mu g\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}$ (β′) $v_0 \geq \mu g\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}$ (γ′) $v_0 \leq \mu g\sqrt{\frac{m_2}{k}}$

Λύση:
Για να μήν ολισθήσει το m_2 πάνω στο m_1 πρέπει η στατική τριβή να είναι μικρότερη της οριακής τριβής $T_s \leq T_{op} \Leftrightarrow T_s \leq \mu m_2 g$.

Το σώμα m_2 κάνει α.α.τ. με συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$ και σταθερά επαναφοράς $D_2 = m_2\omega^2$. Η μέγιστη δύναμη που δέχεται είναι $\Sigma F_{2,max} = T_s = D_2 A$. Άρα πρέπει να ισχύει $D_2 A \leq \mu m_2 g \Leftrightarrow m_2\omega^2 A \leq \mu m_2 g \Leftrightarrow \frac{k}{m_1+m_2}A \leq \mu g$

Όμως η ταχύτητα v_0 είναι μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης, άρα: $A = \sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}v_0$. Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση, έχουμε:
$\frac{k}{m_1+m_2}A \leq \mu g <=> \frac{k}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}v_0 \leq \mu g \Leftrightarrow \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}v_0 \leq \mu g <=> v_0 \leq \mu g\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}$
Σωστή η (α)

8. Στις ελεύθερες άκρες ελατηρίων k και $2k$ συνδέονται σώματα $m_1 = m$ και $m_2 = 2m$ αντίστοιχα. Τα σώματα απομακρύνονται από την κοινή θέση φυσικών μηκών των ελατηρίων κατά $2d$ και d αντίστοιχα και την χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνονται ελεύθερα. Τα σώματα συγκρούονται στη Θ.Φ.Μ. κεντρικά και ελαστικά, και το συσσωμάτωμα κάνει α.α.τ. με $D = 3k$. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι:



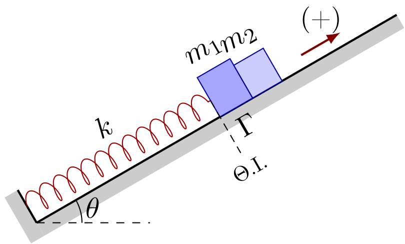
(α′) $A' = d$ (β′) $A' = d/2$ (γ′) $A' = 2d$

Λύση:
Θα βρούμε τις ταχύτητες του m_2 και του m_1 στη θέση της σύγκρουσης (ΘΙ τους). Επειδή τα σώμαατα αφήνονται (έχουν ταχύτητα μηδέν) ξεκινούν από ακραίες θέσεις και φτάνουν στη ΘΙ με μέγιστες ταχύτητες, δηλαδή $A_2 = 2d$, και $A_1 = d$ και οι ταχύτητές τους είναι $v_2 = \sqrt{\frac{2k}{2m}}2d = \sqrt{\frac{k}{m}}2d$ και $v_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}d$ αντίστοιχα.

Α.Δ.Ο. στην κρούση $2mv_2 - mv_1 = 3mv_\sigma \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{k}{m}}2d - \sqrt{\frac{k}{m}}d = 3v_\sigma \Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{k}{m}}d = 3v_\sigma \Leftrightarrow v_\sigma = \sqrt{\frac{k}{m}}d$

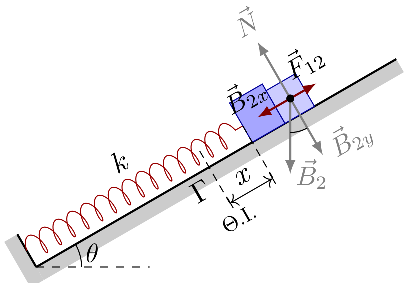
Όμως η ταχύτητα υ_σ είναι μέγιστη ταχύτητα της νέας ταλάντωσης, άρα: $A' = \sqrt{\frac{3m}{3k}}\upsilon_\sigma$. Αντικαθιστώντας την προηγούμενη σχέση, έχουμε:
$A' = \sqrt{\frac{3m}{3k}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} d \Leftrightarrow A' = d$
Σωστή η (α)

9. Στην ελεύθερη άκρη ελατηρίου σταθεράς k σε πλάγιο επίπεδο γωνίας θ ισορροπούν σώματα m_1 και m_2. Συμπιέζουμε το ελατήριο με τα σώματα κατά d από την θέση ισορροπίας και τα αφήνουμε ελεύθερα να κάνουν α.α.τ. Η μέγιστη συμπίεση d που μπορούμε να πετύχουμε χωρίς το m_2 να χάσει την επαφή του με το m_1, είναι:



(α΄) $d = \frac{(m_1+m_2)g\,\eta\mu\,\theta}{k}$ (β΄) $d = \frac{m_1 g\,\eta\mu\,\theta}{k}$ (γ΄) $d = \frac{m_2 g\,\eta\mu\,\theta}{k}$

Λύση:
Η συμπίεση d από την θέση ισορροπίας των σωμάτων είναι και το πλάτος A της ταλάντωσης που θα εκτελέσουν, αφού εκεί έχουν ταχύτητα μηδέν. Για να μήν χάσει την επαφή του το m_2 με το m_1 πρέπει να υπάρχει πάντα δύναμη επαφής από το m_1 στο m_2. Στην τυχαία απομάκρυνση x προς τα πάνω (από τη ΘΙ) θα πρέπει να ισχύει $F_{12} \geq 0$.



Το σώμα m_2 κάνει α.α.τ. με συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$ και σταθερά επαναφοράς $D_2 = m_2\omega^2$. Άρα πρέπει να δέχεται δύναμη επαναφοράς της μορφής $\Sigma F = -D_2 x \Leftrightarrow F_{12} - B_{2x} = -D_2 x \Leftrightarrow F_{12} = m_2 g\,\eta\mu\,\varphi - D_2 x$.
Επομένως πρέπει να ισχύει $m_2 g\,\eta\mu\,\varphi - D_2 x \geq 0$, για κάθε x, άρα και για το $x = +A$. Αυτό μας δίνει $m_2\omega^2 A \leq m_2 g\,\eta\mu\,\varphi <=> \frac{k}{m_1+m_2}A \leq g\,\eta\mu\,\varphi$. και τελικά $A \leq \frac{m_1+m_2}{k} g\,\eta\mu\,\varphi$
Σωστή η (α)

10. Σώμα κάνει φθίνουσα ταλάντωση με δύναμη απόσβεσης της μορφής $F' = -b\upsilon$. Όταν το πλάτος ταλάντωσης του σώματος μειωθεί κατά 50%, η ενέργεια της ταλάντωσης θα μειωθεί κατά:

(α΄) 50% (β΄) 75% (γ΄) 90%

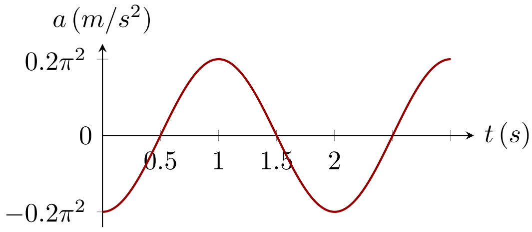
Λύση:
Μείωση 50% σημαίνει $A' = A - \frac{50}{100}A = \frac{A}{2}$. Τότε το ποσοστό μείωσης της ενέργειας είναι:
$$\frac{|\Delta E|}{E}100\% = \frac{E-E'}{E}100\% = (1-\frac{E'}{E})100\% = (1-\frac{\frac{1}{2}DA'^2}{\frac{1}{2}DA^2})100\% \Leftrightarrow$$
$$(1-\frac{A'^2}{A^2})100\% = (1-\frac{A^2/4}{A^2})100\% \Leftrightarrow (1-\frac{1}{4})100\% = 75\%$$
Σωστό το (β)

11. Σώμα μετέχει σε δύο αρμονικές ταλαντώσεις γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, στην ίδια διεύθυνση με ίδια πλάτη και συχνότητες που διαφέρουν λίγο μεταξύ τους, για τις οποίες ισχύει $\omega_2 - \omega_1 = 2\pi$. Η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται 100 φορές μέσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς του πλάτους της ιδιόμορφης ταλάντωσης. Οι συχνότητες των ταλαντώσεων είναι (σε Hz):

(α΄) $f_1 = 49,\ f_2 = 51$ (β΄) $f_1 = 49.5,\ f_2 = 50.5$ (γ΄) $f_1 = 99.5,\ f_2 = 100.5$

Λύση:
$\omega_2 - \omega_1 = 2\pi \Leftrightarrow 2\pi f_2 = 2\pi f_1 = 2\pi \Leftrightarrow f_2 - f_1 = 1$ και $T_\delta = \frac{1}{f_2 - f_1} = 1$ s. Σε κάθε ταλάντωση η ταχύτητα μηδενίζεται δύο φορές (στις ακραίες θέσεις), άρα αφού σε μία περίοδο διακροτήματος η ταχύτητα μηδενίζεται 100 φορές το σώμα εκτελεί 50 ταλαντώσεις (σε 1s). Άρα η συχνότητα της ταλάντωσης είναι 50Hz. Όμως $f_{\tau\alpha\lambda} = \dfrac{f_1 + f_2}{2}$ άρα $\dfrac{f_1 + f_2}{2} = 50 \Leftrightarrow f_1 + f_2 = 100$. Λύνουμε εύκολα το σύστημα βρίσκοντας $f_2 = 50,5$ Hz και $f_1 = 49.5$ Hz
Σωστό το (β)

12. Σύστημα ελατηρίου-σώματος κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από το διπλανό διάγραμμα.
Η εξίσωση απομάκρυνσης του σώματος είναι:



(α΄) $x = 0.2\,\eta\mu(\pi t + \frac{\pi}{2})$ (β΄) $x = 0.2\pi\,\eta\mu(\pi t + \frac{\pi}{2})$ (γ΄) $x = 0.2\,\eta\mu(\pi t + \frac{3\pi}{2})$

Λύση:
Από το διάγραμμα βλέπουμε ότι την χρονική στιγμή $t = 0$ έχουμε μέγιστη αρνητική επιτάχυνση, άρα το σύστημα βρίσκεται στην ακραία θετική του θέση ($x = +A$). Η περίοδος φαίνεται εύκολα ότι είναι $T = 2$s και η συχνότητα $\omega = 2\pi/T = \pi$ rad/s. Μένει μόνο η αρχική φάση της ταλάντωσης και το πλάτος:
$x = A\,\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ άρα $-A = \eta\mu(\varphi_0) \Leftrightarrow \eta\mu\,\varphi_0 = -1 \Leftrightarrow \varphi_0 = 3\pi/2$.
$a_{max} = \omega^2 A \Leftrightarrow 0.2\pi^2 = \pi^2 A \Leftrightarrow A = 0,2$m Άρα $x = 0,2\,\eta\mu(\pi t + \frac{3\pi}{2})$
Σωστό το (γ)

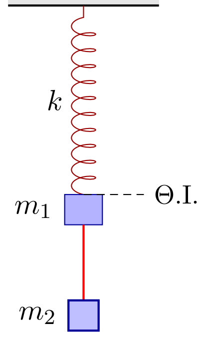
13. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις που εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση, γύρω από το ίδιο σημείο, με το ίδιο πλάτος και με συχνότητες $f_1 = 200$Hz και f_2. Μειώνουμε τη συχνότητα f_2 κατά 8Hz και παρατηρούμε ότι ο αριθμός των διακροτημάτων που παράγονται ανά δευτερόλεπτο παραμένει ο ίδιος. Η συχνότητα f_2 έχει τιμή:

(α΄) 192 Hz (β΄) 196 Hz (γ΄) 204 Hz (δ΄) 208 Hz

Λύση:
Αφού η περίοδος εξαρτάται μόνο από την διαφορά των συχνοτήτων $|f_1 - f_2|$ και μειώνουμε την f_2 κατά 8Hz και η διαφορά μένει ίδια άρα πριν ήταν μεγαλύτερη κατά 4Hz από τη f_1 και τώρα είναι μικρότερη κατά 4Hz
Άρα ήταν 204Hz και έγινε 196Hz
Σωστό το (β)

1.1.2 Ασκήσεις

1. Σώμα μάζας $m_1 = 1$kg είναι δεμένο στο κάτω άκρο ελατηρίου σταθεράς $k = 100$N/m. Στο σώμα m_1 είναι δεμένο μέσω νήματος δεύτερο σώμα μάζας $m_2 = 3$kg. Το σύστημα των δύο σωμάτων απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας τους προς τα κάτω και αφήνεται ελεύθερο, οπότε κάνει αμείωτη απλή αρμονική ταλάντωση. Δίνεται $g = 10\,\text{m/s}^2$.



(α΄) Να υπολογίσετε την μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου για την οποία το νήμα δεν χαλαρώνει κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης.

(β′) Να βρείτε εξίσωση της τάσης του νήματος σε συνάρτηση με τον χρόνο, αν $A = 0,4$m.

(γ′) Να υπολογίσετε την ταχύτητα v_1 των σωμάτων όταν η τάση του νήματος έχει μέτρο 15 N για δεύτερη φορά.

Κάποια χρονική στιγμή που το σύστημα διέρχεται από τη Θ.Ι. με αρνητική ταχύτητα, το νήμα κόβεται και το σώμα m_2 απομακρύνεται.

(δ′) Να υπολογίσετε την μεταβολή της ενέργειας ταλάντωσης του συστήματος κατά την απομάκρυνση του σώματος m_2.

Λύση:

α) Το σώμα m_2 κάνει α.α.τ. με την συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} = 5$rad/s (όσο το νήμα είναι τεντωμένο) και έχει σταθερά επαναφοράς $D_2 = m_2\omega^2$. Άρα πρέπει να δέχεται συνισταμένη δύναμη της μορφής $\Sigma F_2 = -D_2 x \Leftrightarrow T - m_2 g = -m_2\omega^2 x \Leftrightarrow T = m_2 g - m_2\omega^2 x$ (1). Επειδή $T \geq 0 \Leftrightarrow m_2 g - m_2\omega^2 x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{g}{\omega^2}$

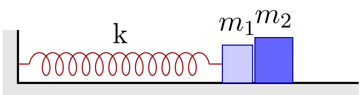
Άρα και το πλάτος A πρέπει να είναι $A \leq \frac{g}{\omega^2}$ και οριακά $A_{\max} = \frac{10}{5^2} = 0,4$m.

β) Με θετική φορά πάνω, η αρχική απομάκρυνση είναι $x_0 = -0,4$m άρα για την αρχική φάση έχουμε $-0,4 = 0,4\,\eta\mu\,\varphi_0 \Leftrightarrow \eta\mu\,\varphi_0 = -1 \Leftrightarrow \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$ rad. Η εξίσωση ταλάντωσης είναι $x = 0,4\,\eta\mu(5t + \frac{3\pi}{2})\,(SI)$ και την αντικαθιστούμε στην εξίσωση (1): $T = 30 - 30\,\eta\mu(5t + \frac{3\pi}{2})\,(SI)$.

γ) Από την εξίσωση (1) έχουμε $T = 30 - 75x$ (SI) και θέτοντας $15 = 30 - 75x \Leftrightarrow 75x = 15 \Leftrightarrow x = 0,2$m. Ενέργειες ταλάντωσης $K + U = E \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Leftrightarrow 4v^2 + 100 \cdot 0.2^2 = 100 \cdot 0.4^2 \Leftrightarrow 4v^2 = 100(0.16 - 0.04) \Leftrightarrow v = -\sqrt{3}$m/s (τη 2^{η} φορά).

δ) Η θέση ισορροπίας αλλάζει όταν φύγει το m_2, όπως και η συχνότητα ω. Για την νέα θέση ισορροπίας πρέπει να βρούμε πρώτα την απόσταση ℓ_1 της ΘΦΜ από την παλιά ΘΙ στην οποία ισορροπεί μάζα $m_1 + m_2$: $k\ell_1 = (m_1 + m_2)g \Leftrightarrow \ell_1 = 0.4$m. Η νέα ΘΙ θα βρίσκεται σε απόσταση $m_1 g = k\ell_2 \Leftrightarrow \ell_2 = 0.1$m από την ΘΦΜ. Επομένως το σώμα βρίσκεται σε απομάκρυνση $x_1 = \ell_1 - \ell_2 = 0.3$m από τη νέα ΘΙ και κινείται με την μέγιστη ταχύτητα της πρώτης ταλάντωσης, άρα $v_1 = v_{\max} = 5 \cdot 0.4 = 2$m/s. Η ενέργεια της νέας ταλάντωσης είναι $E' = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = 2 + 4,5 = 6,5$J. Η ενέργεια πριν ήταν $E = \frac{1}{2}kA^2 = 8$J, άρα $\Delta E = -1,5$J.

2. Οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $K = 300\,N/m$ είναι δεμένο στη μία άκρη του σε σταθερό σημείο και στην άλλη άκρη του σε σώμα μάζας $m_1 = 3\,Kg$. Το σώμα m_1 εφάπτεται χωρίς να είναι κολλημένο με σώμα m_2 και τα δύο σώματα ηρεμούν. Θεωρούμε το επίπεδο της κίνησης λείο. Το σώμα m_1 δέχεται οριζόντια δύναμη προς το μέρος του ελατηρίου μέτρου $F = 25\,N$ η οποία καταργείται όταν το ελατήριο συμπιεστεί κατά $\alpha = 6\,cm$. Μετά την κατάργηση της δύναμης το σώμα m_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και γυρίζοντας στην αρχική του θέση, συγκρούεται πλαστικά με το ακίνητο σώμα m_2.



(α′) Να βρεθεί η αρχική μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου.

(β′) Να βρεθεί η ταχύτητα το συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση και η μάζα m_2, αν το ποσοστό απώλειας κινητικής ενέργειας κατά την κρούση είναι 25%.

(γ′) Να βρεθεί το νέο πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

(δ′) Να υπολογιστεί το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος όταν αυτό διέρχεται για πρώτη φορά από την θέση $x_1 = \dfrac{A'\sqrt{3}}{2}$, όπου A' το πλάτος ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Λύση:

α) Το έργο της δύναμης F μετατρέπεται σε ενέργεια διέγερσης-ταλάντωσης, επομένως $E = Fa \Leftrightarrow \frac{1}{2}kA^2 = Fa \Leftrightarrow \frac{1}{2}300A^2 = 25 \cdot 6 \cdot 10^{-2} \Leftrightarrow 150A^2 = 150 \cdot 10^{-2} \Leftrightarrow A = 0.1$m.

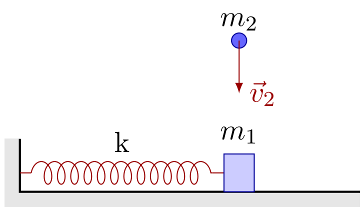
β) Το σώμα m_1 γυρίζοντας στην θέση ισορροπίας του έχει ταχύτητα $v_1 = \omega A = \sqrt{\frac{300}{3}}0.1 \Leftrightarrow v_1 = 1\text{m/s}$. Α.Δ.Ο. στην κρούση: $m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v_\sigma \Leftrightarrow 3 = (3 + m_2)v_\sigma$ (1). Το ποσοστό απώλειας κινητικής ενέργειας στην κρούση υπολογίζεται από τον τύπο $\frac{K-K'}{K}100\% = 25\% \Leftrightarrow (1 - \frac{K'}{K}) = 0.25 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_\sigma^2}{\frac{1}{2}m_1 v_1^2} = 0.75 \Leftrightarrow \frac{(3+m_2)v_\sigma^2}{3} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow (3 + m_2)v_\sigma^2 = 9/4$ (2). Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2) [διαιρώντας κατα μέλη] και βρίσκουμε $v_\sigma = \frac{3}{4}\text{m/s}$, και μετά εύκολα από την (1) $m_2 = 1\text{kg}$.

γ) Η v_σ είναι η μέγιστη ταχύτητα της νέας ταλάντωσης, επομένως $v_\sigma = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}A' \Leftrightarrow A' = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{4}{300}} = \frac{3}{4}\frac{2}{10\sqrt{3}} \Leftrightarrow A' = 0.1\frac{\sqrt{3}}{2}\text{m}$.

δ) $\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v$, άρα πρέπει να βρούμε την ταχύτητα v_1 στη θέση x_1. Με ενέργειες ταλάντωσης (τί άλλο!) $\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kA'^2 \Leftrightarrow 4v_1^2 + \frac{1}{2}300\cdot 10^{-2}\frac{9}{16} = \frac{1}{2}300\cdot 10^{-2}\frac{3}{4} \Leftrightarrow 4v_1^2 = 150\cdot 10^{-2}(\frac{3}{4} - \frac{9}{16}) \Leftrightarrow 4v_1^2 = 1.5\frac{3}{16} \Leftrightarrow v_1^2 = \frac{9}{2\cdot 4\cdot 16} \Leftrightarrow v_1 = \pm\frac{3\sqrt{2}}{16}\text{m/s}$.

Και με αντικατάσταση: $\frac{dK}{dt} = -kx_1 v_1 = -300 \cdot 0.1\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{3\sqrt{2}}{16} = -45\frac{\sqrt{6}}{16}$ J/s.

3. Οριζόντιο ελατήριο, σταθεράς $k = 100\,N/m$, είναι δεμένο από σταθερό σημείο ενώ στην άλλη άκρη του είναι δεμένο σώμα μάζας $m = 1\,kg$. Το ελατήριο εκτρέπεται συμπιέζοντας το ελατήριο κατά $d = 20\,cm$ και αφήνεται ελεύθερο. Την ίδια στιγμή αφήνεται από κατάλληλο ύψος ένα σώμα $m_2 = 3\,kg$ που συναντά και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα m_1 όταν αυτό διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του.



(α΄) Να βρεθεί το ύψος h.

(β΄) Να βρεθεί το νέο πλάτος και η εξίσωση $x = f(t)$ της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

(γ΄) Να υπολογιστεί η απώλεια ενέργειας κατά την κρούση, και το ποσοστό μεταβολής της ενέργειας ταλάντωσης.

(δ΄) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση $x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}A$ για δεύτερη φορά.

Λύση:

α) Το σώμα m_1 αφήνεται να κάνει ταλάντωση από παραμόρφωση d άρα αυτή είναι το πλάτος της ταλάντωσης, $A = 0.2\text{m}$. Από την αριστερή ακραία θέση (που αφήνεται) μέχρι τη ΘΙ (ΘΦΜ) όπου συγκρούεται με το m_2, το σώμα χρειάζεται χρόνο $t = T/4$ και φτάνει με την μέγιστη ταχύτητα $v_{max} = \omega A$.

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 10$ rad/s και $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.2\pi\text{s}$. Το σώμα m_2 πρέπει να πέσει για χρόνο $t_1 = T/4 = \pi/20\text{s}$, άρα το ύψος θα είναι $h = \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}10 \cdot \pi^2/400 = 1/8\text{m}$. ($\pi^2 = 10$)

β) Α.Δ.Ο. στον $x'x$ άξονα: $m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v_\sigma \Leftrightarrow 1 \cdot 2 = 4v_\sigma \Leftrightarrow v_\sigma = 0.5\text{m/s}$. Αυτή είναι η $v'_{max} = \omega' A'$ της νέας ταλάντωσης. $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} = 5\text{rad/s}$ επομένως $A' = 0.1\text{m}$. Με θετική φορά δεξιά δέν έχουμε αρχική φάση και η εξίσωση είναι $x = 0.1\,\text{ημ}(5t)$ (SI).

γ) Απώλεια ενέργειας $|\Delta K| = K - K' = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_\sigma^2 = 2 - 0,5 = 1,5\text{J}$ (και η ίδια είναι η απώλεια ενέργειας της ταλάντωσης, αφού οι κινητικές είναι στη ΘΙ).

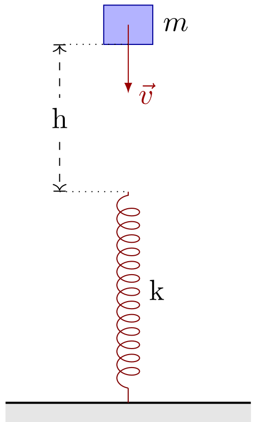
Το ποσοστό μεταβολής της ενέργειας ταλάντωσης είναι $\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta K}{K} = \frac{-1,5}{2} = -0.75$ ή -75%.

δ) $K + U = E \Leftrightarrow dK + dU = \cancelto{0}{dE} \Leftrightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -(-kx_1 v_1) \Leftrightarrow \frac{dU}{dt} = kx_1 v_1$ (1)

$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kA'^2 \Leftrightarrow 4v_1^2 = \frac{1}{2}100(0.1\frac{1}{4}) \Leftrightarrow v_1^2 = 5 \Leftrightarrow v_1 = \pm\sqrt{5}\text{m/s}$. Τη δεύτερη φορά $v_1 = -\sqrt{5}\text{m/s}$.

(1) $\Rightarrow \frac{dU}{dt} = 100 \cdot 0.1\frac{\sqrt{3}}{2}(-\sqrt{5}) = -5\sqrt{15}\text{J/s}$ (Σωστό πρόσημο αφού τη δεύτερη φορά γυρίζει προς τη ΘΙ, ποτέ δεν βλάπτει ένας λογικός έλεγχος των μαθηματικών...)

4. Κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 100\,N/m$ είναι σταθερά δεμένο στο έδαφος. Πάνω από την ελεύθερη άκρη του ελατηρίου αφήνουμε από ύψος $h = 0,15\,m$ ένα σώμα μάζας $m = 1\,kg$. Το σώμα πέφτει ελεύθερα και καρφώνεται στην ελεύθερη άκρη του ελατηρίου (χωρίς απώλειες ενέργειας).



(α΄) Να βρείτε την μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου.

(β΄) Να γράψετε την εξίσωση ταλάντωσης του συστήματος $x = f(t)$, θεωρώντας θετική την φορά προς τα επάνω.

(γ΄) Να βρείτε την δύναμη επαναφοράς και τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στη θέση που συμβαίνει $K = 3U$ για πρώτη φορά μετά την $t = 0$.

(δ΄) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας στην παραπάνω θέση.

Λύση:
α) Το σώμα m φτάνει στο ελατήριο με ταχύτητα υ_1 που βρίσκεται με ΑΔΜΕ
$mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 \Leftrightarrow \upsilon_1 = \sqrt{2gh} \Leftrightarrow \upsilon_1 = \sqrt{3}$ m/s.
Όταν σφηνώνεται στο ελατήριο βρίσκεται στην ΘΦΜ αλλά η ΘΙ της ταλάντωσης είναι πιό κάτω ας πούμε σε απόσταση ℓ από την ΘΦΜ, εκεί όπου ισχύει $\Sigma F = 0 \Leftrightarrow k\ell = mg \Leftrightarrow \ell = 0.1$ m. Άρα την χρονική στιγμή $t = 0$ το σύστημα βρίσκεται σε απομάκρυνση $x_1 = +\ell$ και έχει ταχύτητα $\upsilon_1 = -\sqrt{3}$ m/s (με θετική φορά προς τα πάνω) και κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10$ rad/s.
$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Leftrightarrow 3 + 1 = 100A^2 \Leftrightarrow A = 0.2$m
Η μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου είναι στην κατώτερη ακραία θέση όπου $x_{max} = \ell + A = 0.3$m
β) Ζητάμε ουσιαστικά την αρχική φάση, γιατί πλάτος και κυκλική συχνότητα είναι ήδη γνωστά.
$x = A\,\text{ημ}(\omega t + \varphi_0) \overset{t=0}{\Longrightarrow} +0.1 = 0.2\,\text{ημ}(\varphi_0) \Leftrightarrow \text{ημ}(\varphi_0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{3}$ ή $\varphi_0 = \frac{5\pi}{3}$
Η ταχύτητα τότε είναι αρνητική $\upsilon_1 < 0 \Leftrightarrow \text{συν}(\varphi_0) < 0$, άρα δεκτή η $\varphi_0 = \frac{5\pi}{3}$.
Η εξίσωση ταλάντωσης: $x = 0.2\,\text{ημ}(10t + \frac{5\pi}{3})$ (SI)
γ) $K = 3U$. $K + U = E \Leftrightarrow 3U + U = E \Leftrightarrow 4U = E \Leftrightarrow 4\frac{1}{2}kx_2 = \frac{1}{2}kA^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4}A^2 \Leftrightarrow x = \pm A/2$. Άρα θα περάσει για πρώτη φορά από την θέση $x = -A/2$ κινούμενο προς τα κάτω. Η δύναμη επαναφοράς υπολογίζεται από τον τύπο $F = -kx$ (x από ΘΙ), άρα $F = -100(-0.1) = 10$N. Η δύναμη του ελατηρίου υπολογίζεται από τον ίδιο τύπο $F_{\varepsilon\lambda} = -kx$, μόνο που τώρα το x πρέπει να μετρηθεί από τη ΘΦΜ. Σε απομάκρυνση $x = -0.1$m από τη ΘΙ, η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι $x = \ell + A/2 = 0.2$m και η δύναμη $F_{\varepsilon\lambda} = 100 \cdot 0.2 = 20$N (Θετική γιατί είναι προς τη ΘΦΜ, άρα έχει τη κατεύθυνση προς τα πάνω). Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου όμοια υπολογίζεται ως $U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}kx^2$ (x από ΘΦΜ) άρα $U_{\varepsilon\lambda} = 2$J.
δ) Υπολογίζουμε την ταχύτητα στην απομάκρυνση $x = -0.1$m. Από την δεδομένη σχέση $K = 3U \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = 3\frac{1}{2}100 \cdot 0.1^2 \Leftrightarrow v^2 = 1 \Leftrightarrow v = \pm 1$ m/s. Όμως την πρώτη φορά θα κατεβαίνει άρα $v = -1$ m/s.
$\frac{dK}{dt} = \Sigma F v = -kxv = -100(-0.1)(-1) = -10$ J/s.

5. Το πίσω (μονό) αμορτισέρ μίας μηχανής συμπεριφέρεται ως ιδανικό ελατήριο σταθεράς k. Αν αγνοήσουμε το εμπρός αμορτισέρ, τότε όταν κάθεται ο οδηγός μάζας $m = 80$kg αυτό συμπιέζεται κατά 5cm.

(α΄) Υπολογίστε τη σταθερά k του αμορτισέρ.

(β΄) Υποθέτουμε ότι το ελατήριο του αμορτισέρ συγκρατεί συνολικά μάζα $m_{o\lambda} = 160$kg. Βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης της μηχανής.

(γ΄) Φυσικά το αμορτισέρ μίας μηχανής δέν πρέπει να κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Γι' αυτό και εισάγουμε απόσβεση στο αμορτισέρ (μέσω κάποιου υγρού) με σταθερά b, έτσι ώστε να υπάρχει δύναμη απόσβεσης της μορφής $F_{\alpha\pi} = -bv$. Εκτιμήστε τη σταθερά b έτσι ώστε να χάνεται το 99,99% της ενέργειας ταλάντωσης σε μία περίοδο Τ. Δίνεται ότι η σταθερά Λ της εκθετικής μείωσης συνδέεται με τη σταθερά b με τη σχέση $\Lambda = \frac{b}{2m}$.

(δ΄) Η μηχανή κινούμενη με ταχύτητα v περνάει από δρόμο με διαδοχικά εμπόδια (πχ τα ανακλαστικά "μάτια γάτας" στη διπλή γραμμή) που απέχουν το ένα από το άλλο 80cm, με αποτέλεσμα να κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση. Βρείτε την ταχύτητα v ώστε να έχουμε μεγιστοποίηση του πλάτους ταλάντωσης. (Φυσικά αυτή πρέπει να είναι η ταχύτητα *που πρέπει να αποφεύγει ο οδηγός!*)

Δίνονται: $\ln 5 = 1,61$, $\ln 2 = 0,69$.

Λύση:

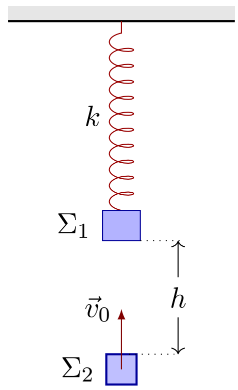
α) Εύκολα $\Delta F = k\Delta x \Leftrightarrow 800 = k5\cdot 10^{-2} \Leftrightarrow k = 16000$ N/m

β) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_{o\lambda}}{k}} \Leftrightarrow T = 1.57\cdot 10^{-2}$ s ή $T = 0.5\pi\cdot 10^{-2}$ s

γ) Ζητάμε το Λ ώστε $\frac{|\Delta E|}{E_0}100\% = 99,99\% \Leftrightarrow \frac{E_0 - E_1}{E_0} = 0,9999 \Leftrightarrow \frac{E_1}{E_0} = 0.0001$
$E_1 = 10^{-4}E_0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}kA_1^2 = 10^{-4}\frac{1}{2}kA_0^2 \Leftrightarrow A_1 = 10^{-2}A_0 \Leftrightarrow A_0\,\mathrm{e}^{-\Lambda T} = 10^{-2}A_0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\Lambda T} = 10^{-2} \Leftrightarrow -\frac{\Lambda}{T} = \ln(10^{-2}) \Leftrightarrow -\Lambda = -2T\ln 10 \Leftrightarrow \Lambda = 2T\ln(2\cdot 5) \Leftrightarrow \Lambda = 2T(\ln 2 + \ln 5)$ και κάνοντας τις πράξεις: $\Lambda = 7.23\cdot 10^{-2}\ \mathrm{s}^{-1}$. Οπότε $b = 2m\Lambda \Leftrightarrow b = 23.14\ \mathrm{kgs}^{-1}$

δ) Καθώς κινείται το αυτοκίνητο χτυπάει περιοδικά στα διαδοχικά εξογκώματα. Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών χτυπημάτων είναι ίσος με τον χρόνο t_1 που χρειάζεται για να καλύψει την απόσταση $d = 80$ cm, άρα $t_1 = \frac{d}{v}$. Αυτή είναι η περίοδος της εξωτερικής διέγερσης (από τα εξογκώματα), άρα η συχνότητα της διέγερσης είναι $f_\delta = \frac{1}{t_1} = \frac{v}{d}$. Για να έχουμε συντονισμό πρέπει $f_\delta = f_0$ ή $T_\delta = T_0 \Leftrightarrow t_1 = T \Leftrightarrow \frac{d}{v} = T \Leftrightarrow v = \frac{d}{T}$ και με αντικατάσταση $v = \frac{0.8}{0.0157} \simeq 51$ m/s

6. Σώμα Σ_1, μάζας $m_1 = m = 1$kg, ισορροπεί δεμένο στην κάτω άκρη κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k = 900$N/m , του οποίου η άλλη άκρη είναι ακλόνητα στερεωμένη σε οροφή. Ένα δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = m = 1$kg, βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω, με ταχύτητα $v_0 = 6$m/s, από σημείο που βρίσκεται σε απόσταση $h = 1,35$m κάτω από το σώμα Σ_1.
Τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά ελαστικά την $t = 0$ και στη συνέχεια το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.
Να βρείτε:



(α΄) Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος Σ_1.

(β΄) Την θέση του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή που η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_1 γίνεται για 1η φορά ελάχιστη.

(γ΄) Την μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου κατά την ταλάντωση του σώματος.

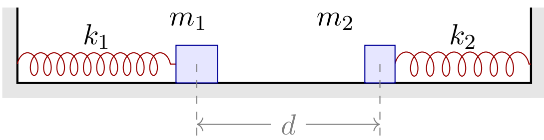
(δ΄) Τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_1, τη στιγμή που η ταχύτητά του είναι $v = -\dfrac{v_{max}}{2}$ για πρώτη φορά.

Λύση:

α) Βρίσκουμε την ταχύτητα v_2 με την οποία φτάνει το σώμα-2 στο σώμα-1. Με διατήρηση μηχανικής ενέργειας για το σώμα-2:
$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}m_2v_0^2 + 0 = \frac{1}{2}m_2v_2^2 + m_2gh \Leftrightarrow v_2^2 = v_0^2 - 2gh \Leftrightarrow v_2^2 = 36 - 27 = 9 \Leftrightarrow v_2 = 3$ m/s.
Έχουμε ελαστική κρούση με το $v_1 = 0$ άρα από τους μεγάλους τύπους θα έχουμε:
$v_1' = \frac{2m_2}{m_1+m_2}v_2 \Leftrightarrow v_1' = \frac{2}{2}3 \Leftrightarrow v_1' = 3$ m/s και
$v_2' = \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_2 \Leftrightarrow v_2' = 0$ m/s (ανταλλάσσουν ταχύτητες).
Το σώμα-1 μετά την κρούση είναι στη ΘΙ άρα θα κάνει ταλάντωση με $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 30$ rad/s και θα ισχύει: $v_1' = v_{max} = \omega A \Leftrightarrow A = 0.1$ m.

β) Η Κινητική ενέργεια γίνεται μηδέν για πρώτη φορά στην ακραία ($x = +A$) στην οποία το σώμα φτάσει σε χρόνο $\Delta t = T/4$, όπου $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{15}$ s. Τελικά $\Delta t = \frac{\pi}{60}$ s.
Το σώμα-2 κάνει ελεύθερη πτώση μετά την κρούση και σε χρόνο Δt θα έχει πέσει κατά $y = \frac{1}{2} g \Delta t^2 \Leftrightarrow y = 0.014$ m
γ) Πρέπει να βρούμε την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Αυτή είναι κατά ℓ πάνω από τη ΘΙ, όπου $\Sigma F = 0 \Leftrightarrow k\ell = m_1 g \Leftrightarrow \ell = 1/90$ m.
Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου θα είναι στην κάτω ακραία θέση όπου έχουμε την μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου, οπότε $U_{\varepsilon\lambda,\max} = \frac{1}{2} k (A + \ell)^2 \Leftrightarrow U_{\varepsilon\lambda,\max} = 6.125$ J
δ) Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι η συνισταμένη δύναμη $\frac{dp}{dt} = \Sigma F = -kx_1$. Αρκεί να βρούμε την θέση x_1 όπου $v_1 = -v_{max}/2 = -3/2$ m/s για πρώτη φορά. Αυτό γίνεται στο πρώτο μισό της περιόδου της ταλάντωσης, όταν το σώμα επιστρέφει από την θετική ακραία θέση, άρα $x_1 > 0$. Με ενέργειες ταλάντωσης:
$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Leftrightarrow 900 x_1^2 + (1.5)^2 = 900(0.1)^2 \Leftrightarrow x_1^2 = (9 - 2.25)/900 \Leftrightarrow x_1 = +\frac{\sqrt{3}}{20}$ m.
Τελικά: $\frac{dp}{dt} = -kx_1 = -45\sqrt{3}$ N.

7. Δύο σώματα[1] με μάζες $m_1 = 1\ kg$ και $m_2 = 3\ Kg$ ηρεμούν σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένα στα άκρα δύο οριζόντιων ιδανικών ελατηρίων με σταθερές $k_1 = 100\ N/m$ και $k_2 = 50\ N/m$ αντίστοιχα, απέχοντας απόσταση $d = 0,3\ m$. Εκτρέπουμε το σώμα m_1 προς τα αριστερά κατά $A = 0,5\ m$ και το αφήνουμε ελεύθερο να εκτελέσει ΑΑΤ.



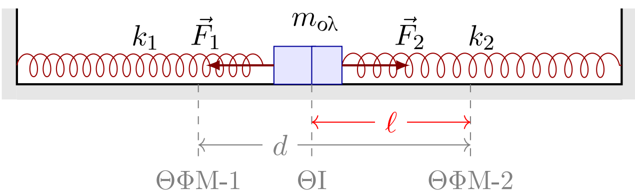
Το σώμα m_1 συγκρούεται πλαστικά με το σώμα m_2. Να βρεθούν:

(α') Η ταχύτητα του m_1 πριν την κρούση και η κοινή ταχύτητα των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση.

(β') Η ενέργεια ταλάντωσης μετά την κρούση.

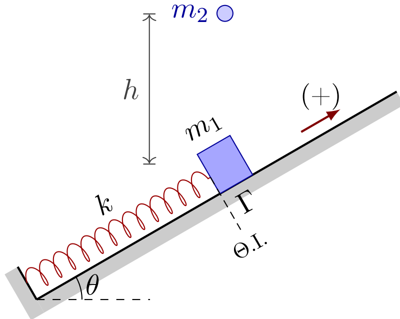
(γ') Το ποσοστό απώλειας κινητικής ενέργειας κατά την κρούση.

Λύση:
α) Το σώμα εκτρέπεται κατά A που είναι και το πλάτος ταλάντωσης που θα κάνει αφού ξεκινάει με $v = 0$. Για να βρούμε την ταχύτητα v_1 στην απομάκρυνση $x_1 = +d$ θα χρησιμοποιήσουμε ενέργειες ταλάντωσης:
$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Leftrightarrow v_1^2 + 100(0.3)^2 = 100(0.5)^2 \Leftrightarrow v_1 = 4$ m/s. Α.Δ.Ο. για την κρούση: $m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_\sigma \Leftrightarrow v_\sigma = 1$ m/s
β) Ξέρουμε ότι το συσσωμάτωμα είναι στην ΘΦΜ του ελατηρίου-2. Αλλά η ΘΙ της ταλάντωσης θα είναι αριστερά, εκεί που οι δύο δυνάμεις των ελατηρίων γίνονται αντίθετες.



Αν πούμε ℓ την απόσταση της ΘΙ από την ΘΦΜ-2 τότε $\Sigma F = 0 \Leftrightarrow k_1(d - \ell) = k_2 \ell \Leftrightarrow 30 - 100\ell = 50\ell \Leftrightarrow \ell = 0,2$ m. Επομένως το συσσωμάτωμα θα βρίσκεται σε απομάκρυνση $x_1 = +0,2$ και θα έχει ταχύτητα v_σ και η ενέργεια της ταλάντωσής του θα είναι: $E = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) x_1^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_1^2 \Leftrightarrow E = 3 + 2 = 5$ J.
γ) $\frac{|\Delta K|}{K} 100\% = \frac{K - K'}{K} 100\% = (1 - \frac{K'}{K}) 100\% = (1 - \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_\sigma^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} 100\% = (1 - \frac{4}{16}) 100\% = 75\%$

8. Σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας $\varphi = 30°$ ισορροπεί σώμα μάζας $m_1 = 3\ kg$ σε ελατήριο σταθεράς $k = 100\text{N/m}$. Από ύψος $h = 2.4\text{m}$ πάνω από το σώμα αφήνεται να πέσει ελεύθερα δεύτερο σώμα μάζας $m_1 = 1$ kg. Η κρούση των δύο σωμάτων είναι πλαστική, γίνεται την χρονική στιγμή $t = 0$ και το συσσωμάτωμα ξεκινά απλή αρμονική ταλάντωση. Να θεωρηθεί θετική φορά προς τα επάνω στο κεκλιμένο.



(α΄) Να υπολογιστεί η κοινή ταχύτητα των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση.

(β΄) Να υπολογίσετε την μεταβολή της ορμής του σώματος m_2 κατά την κρούση.

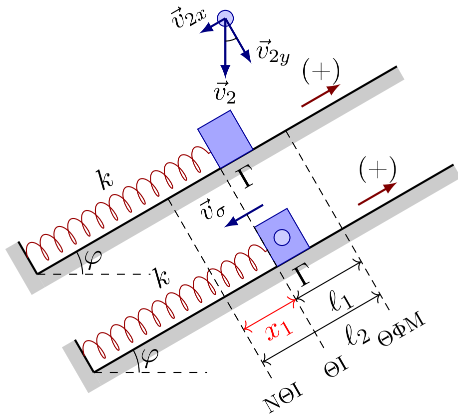
(γ΄) Γράψτε την εξίσωση της απομάκρυνσης $x = f(t)$ της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

(δ΄) Να βρείτε σε πόσο χρονικό διάστημα το συσσωμάτωμα θα επιστρέψει στην θέση της κρούσης.

Λύση:

α) Βρίσκουμε την ταχύτητα v_2 με την οποία το m_2 φτάνει στο σώμα m_1. $h = \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{4.8}{10}} = 0.4\sqrt{3}$ s. Και $v_2 = gt = 4\sqrt{3}$ m/s.

Η ορμή διατηρείται μόνο στον x άξονα. Α.Δ.Ο.: $m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2)v_\sigma \Leftrightarrow 4\sqrt{3}\frac{1}{2} = 4v_\sigma \Leftrightarrow v_\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}$ m/s



β) Η ορμή είναι διάνυσμα, άρα $\Delta p_2^2 = \Delta p_{2x}^2 + \Delta p_{2y}^2$.

Θα βρούμε τη μεταβολή σε κάθε άξονα: $\Delta p_{2y} = p'_{2y} - p_{2y} = 0 - (-m_2 v_{2y}) = 4\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = 6$ kgm/s. (Θετική φορά πάνω).

$\Delta p_{2x} = p'_{2x} - p_{2x} = (-m_2 v_\sigma) - (-m_2 v_{2x}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} = 1.5\sqrt{3}$ kgm/s.

Τελικά $\Delta p_2 = \sqrt{6^2 + (1.5\sqrt{3})^2} = 42.75$ kgm/s με εφ $\theta = \frac{6}{1.5\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

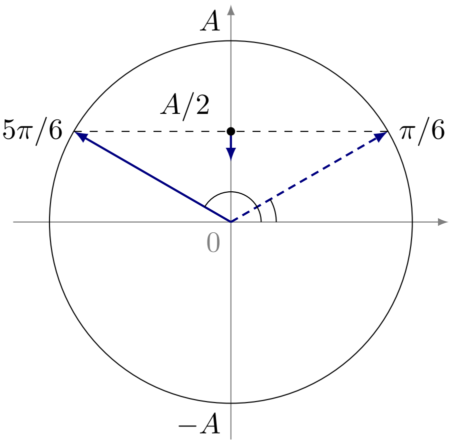
γ) Βρίσκουμε τις αποστάσεις ℓ_1, ℓ_2 της ΘΦΜ από την αρχική και τη νέα ΘΙ.

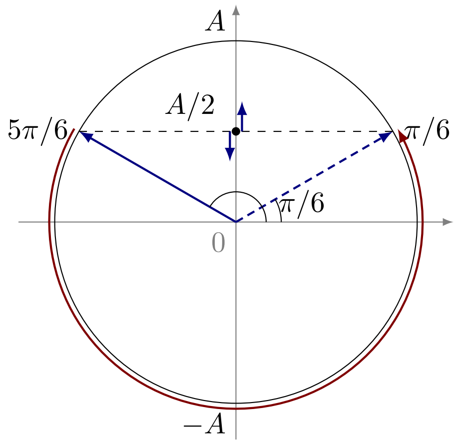
Π.ΘΙ: $k\ell_1 = m_1 g\,\text{ημ}(\varphi) \Leftrightarrow \ell_1 = 0.15\text{m}$

Ν.ΘΙ: $k\ell_2 = (m_1 + m_2)g\,\text{ημ}(\varphi) \Leftrightarrow \ell_2 = 0.2\text{m}$, άρα $x_1 = \ell_2 - \ell_1 = 0.05$ m.

Ενέργειες ταλάντωσης: $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Leftrightarrow m_{\text{ολ}}v_\sigma^2 + kx_1^2 = kA^2 \Leftrightarrow A = 0.1$ m.

Αρχική φάση: $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$ rad γιατί βρίσκεται σε απομάκρυνση $x_1 = +\frac{A}{2}$ και κινείται με ταχύτητα αρνητική ($v_\sigma < 0$ ως προς τη θετική φορά της ταλάντωσης). Από το περιστρεφόμενο διάνυσμα, παρακάτω.





δ) Ο ζητούμενος χρόνος Δt είναι ο χρόνος που απαιτείται για να γράψει το περιστρεφόμενο τόξο $\Delta\varphi = \frac{\pi}{6} + \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$ rad, όπως φαίνεται στο περιστρεφόμενο διάνυσμα.
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} = 5$ rad/s και $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{4\pi}{15}$ s.

9. Σώμα εκτελεί φθίνουσα μηχανική ταλάντωση, το πλάτος της οποίας δίνεται από τη σχέση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$, με $A_0 = 16$cm. Μετά από 10 πλήρεις ταλαντώσεις το ποσοστό μείωσης της ενέργειας είναι 75%.

(α΄) Να βρείτε το πλάτος εκείνη τη χρονική στιγμή, καθώς και την τιμή της σταθεράς Λ, αν η περίοδος είναι $T = 0,1$s.

(β΄) Πόσο είναι το πλάτος της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $30T$;

(γ΄) Αν η δύναμη αντίστασης δίνεται από τη σχέση $F' = -0,2v$, να βρείτε το ρυθμό μείωσης της ενέργειας του ταλαντωτή τη χρονική στιγμή $10T$, αν θεωρήσουμε ότι εκείνη τη στιγμή το σώμα διέρχεται από τη Θ.Ι. της ταλάντωσής του.

Δίνεται $\pi^2 = 10$ και $\ln 2 = 0,7$.

Λύση:
α) $\frac{|\Delta E|}{E}100\% = \frac{E_0 - E'}{E_0}100\% = (1 - \frac{E'}{E_0})100\% = (1 - \frac{\frac{1}{2}DA_0^2\,\mathrm{e}^{-2\Lambda t}}{\frac{1}{2}DA_0^2})100\%$ άρα $(1 - \mathrm{e}^{-2\Lambda t})100 = 75 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2\Lambda t} = 0,25 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2\Lambda t} = 4 \Leftrightarrow 2\Lambda t = \ln 4 \Leftrightarrow \Lambda = \ln 2/(10 \cdot 0,1) \Leftrightarrow \Lambda = \ln 2 = 0,7\ \mathrm{s}^{-1}$.
Από την προηγούμενη έκφραση αν δεν αντικαταστήσουμε μπορούμε να βρούμε εύκολα το πλάτος A_1: $(1 - \frac{\frac{1}{2}DA_1^2}{\frac{1}{2}DA_0^2})100\% = 75\% \Leftrightarrow (1 - \frac{A_1^2}{A_0^2}) = 0,75 \Leftrightarrow A_1^2 = 0,25A_0^2 \Leftrightarrow A_1 = A_0/2 = 8$ cm.
Ή άμεσα: $A_1 = A_0\,\mathrm{e}^{-\Lambda(10T)} \Leftrightarrow A_1 = A_0\,\mathrm{e}^{-\ln 2} = A_0\,\mathrm{e}^{\ln(2^{-1})} = A_0 \cdot 2^{-1} \Leftrightarrow A_1 = A_0/2 = 8$ cm.
β) $A_1 = A_0\,\mathrm{e}^{-\Lambda(30T)} \Leftrightarrow A_1 = A_0\,\mathrm{e}^{-3\ln 2} = A_0\,\mathrm{e}^{\ln(2^{-3})} = A_0 \cdot 2^{-3} \Leftrightarrow A_1 = A_0/8 = 2$ cm.
γ) Η ταχύτητα την χρονική στιγμή $10T$ βρίσκεται από το πλάτος A_1:
$v = \omega A = \frac{2\pi}{T}A = \frac{2\pi}{0.1}8 \cdot 10^{-2} = 1,6\pi \cdot 10^{-2}$ m/s.
Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας E είναι η ισχύς της αντίστασης, άρα:
$\frac{dE}{dt} = F'v = -0.2v^2 = -0.2(1,6\pi \cdot 10^{-2})^2 = -5.1 \cdot 10^{-4}$ J/s.
Άρα ο ρυθμός μείωσης της ενέργειας είναι $-5,1 \cdot 10^{-4}$ J/s.

10. Ένα σώμα μάζας $m = 2$kg εκτελεί ταλάντωση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, οι οποίες εξελίσσονται πάνω στην ίδια διεύθυνση, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και περιγράφονται από τις εξισώσεις στο S.I.

$$x_1 = 0,1\sqrt{3}\,\text{ημ}\left(10t + \frac{\pi}{6}\right), \quad x_2 = 0,1\,\text{ημ}\left(10t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

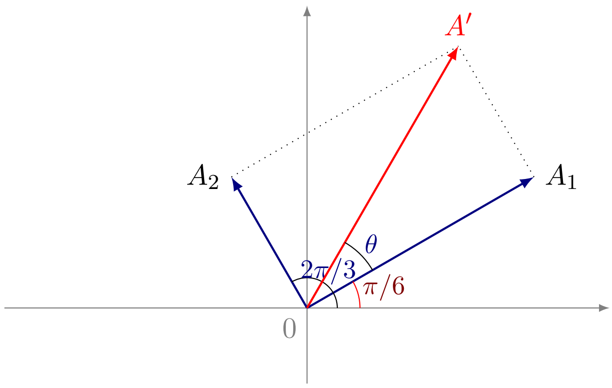
(α΄) Να υπολογίσετε το πλάτος A' της σύνθετης ταλάντωσης.

(β΄) Να βρείτε τη συνάρτηση που δίνει τη θέση του σώματος σε σχέση με το χρόνο, $x = f(t)$.

(γ΄) Να υπολογίσετε τη μεταβολή της ορμής του σώματος από τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{60}$ s μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{\pi}{10}$ s.

(δ΄) Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του σώματος στη θέση όπου η κινητική ενέργεια είναι τριπλάσια της δυναμικής για πρώτη φορά μετά την $t = 0$.

Λύση:
α) $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad.
$A' = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\,\text{συν}(\Delta\varphi)} \Leftrightarrow A' = \sqrt{(0.1\sqrt{3})^2 + 0.1^2} = 0.2$ m
$\text{εφ}\,\theta = \frac{A_2\,\text{ημ}(\Delta\varphi)}{A_1 + A_2\,\text{συν}(\Delta\varphi)} = \frac{0.1\cancelto{1}{\text{ημ}(\frac{\pi}{2})}}{0.1\sqrt{3} + 0.1\cancelto{0}{\text{συν}(\frac{\pi}{2})}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Άρα $\theta = \frac{\pi}{6}$.
β) $x = A'\,\text{ημ}(\omega t + \varphi_1 + \theta) \Leftrightarrow x = 0.2\,\text{ημ}(10t + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow x = 0.2\,\text{ημ}(10t + \frac{\pi}{3})$ (SI)



Οι θέσεις των περιστρεφόμενων την χρονική στιγμή $t = 0$

γ) Η αντίστοιχη εξίσωση ταχύτητας είναι $v = 2\,συν(10t + \frac{\pi}{3})$ (SI), επομένως
$v_1 = 2\,συν(10\frac{\pi}{60} + \frac{\pi}{3}) = 2\,συν(\frac{2\pi}{3}) = -1$ m/s
$v_2 = 2\,συν(10\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{3}) = 2\,συν(\frac{4\pi}{3}) = +1$ m/s
$\Delta p = p_2 - p_1 = mv_2 - mv_1 = 2 \cdot 1 - 2(-1) = 4$kgm/s
δ) $K = 3U$ και $K + U = E \Leftrightarrow 3U + U = E \Leftrightarrow 4U = E \Leftrightarrow 4\frac{1}{2}kx_2 = \frac{1}{2}kA^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4}A^2 \Leftrightarrow x = \pm A/2 \Leftrightarrow x = \pm 0.1$ m. Την πρώτη φορά θα φτάσει στη θέση $x = +0.1$ m με αρνητική ταχύτητα (δες το περιστρεφόμενο A' την χρονική στιγμή $t = 0$). (Επίσης $D = m\omega^2 = 200$ N/m).
Η ταχύτητα μπορεί να βρεθεί με ενέργειες ταλάντωσης ή από την δεδομένη σχέση $K = 3U \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = 3\frac{1}{2}200 \cdot 0.1^2 \Leftrightarrow v^2 = 3 \Leftrightarrow v = -\sqrt{3}$ m/s.
Και τελικά: $\frac{dK}{dt} = -Dxv = -200 \cdot 0.1 \cdot (-\sqrt{3}) = 20\sqrt{3}$J/s.

Βιβλιογραφία

[1] Διονύσιος Μάργαρης. Υλικό φυσικής - χημείας, https://ylikonet.gr, 2018.