Ελατήριο σε κεκλιμένο επίπεδο

ταλάντωση σώματος και κρούση

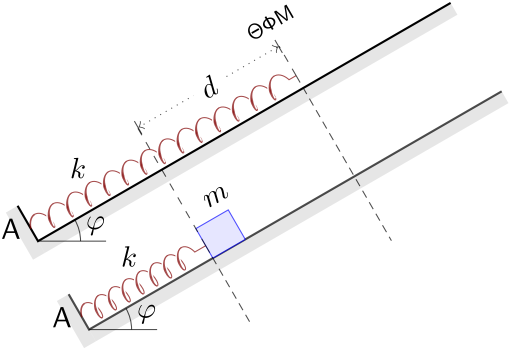
Γιώργος Παπαδημητρίου

2^o ΓΕΛ Ναυπάκτου

17 Νοεμβρίου 2020

Το Πρόβλημα

Σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας $\varphi = 30^\circ$ *βρίσκεται ελατήριο σταθεράς* $k = 100\text{N/m}$*. Τοποθετούμε σε αυτό σώμα* $m = 1\text{Kg}$*, συμπιέζουμε το ελατήριο κατά απόσταση* $d = 0.3\text{m}$ *από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και αφήνουμε ελεύθερο το σώμα να κάνει α.α.τ.*



Ερώτημα Α.

Α. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης $x = f(t)$.

Το σύστημα κάνει α.α.τ. Πρέπει να βρούμε το πλάτος A, την αρχική φάση ϕ_0 και την κυκλική συχνότητα ω της ταλάντωσης.

Ερώτημα Α.

Α. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης $x = f(t)$.

Το σύστημα κάνει α.α.τ. Πρέπει να βρούμε το πλάτος A, *την αρχική φάση* ϕ_0 *και την κυκλική συχνότητα* ω *της ταλάντωσης.*

Η ω βρίσκεται με τον τύπο του $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{1}} = 10\text{rad/s}$

Ερώτημα Α.

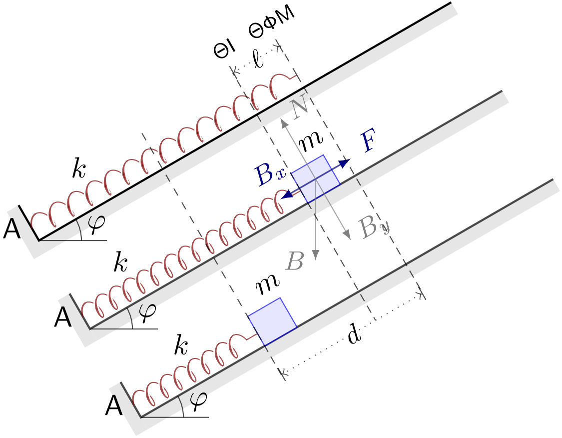
Α. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης $x = f(t)$.

Το σύστημα κάνει α.α.τ. Πρέπει να βρούμε το πλάτος A, την αρχική φάση ϕ_0 και την κυκλική συχνότητα ω της ταλάντωσης.

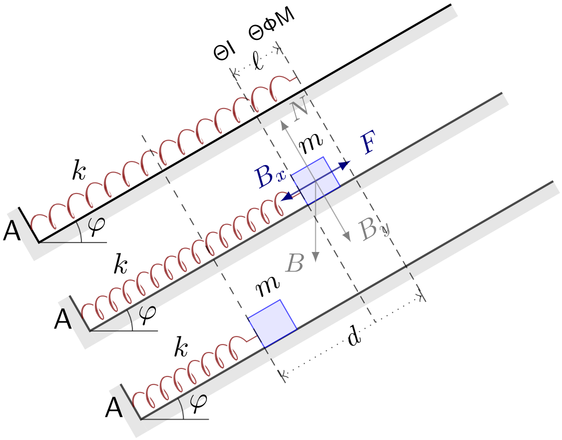
Η ω βρίσκεται με τον τύπο του $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{1}} = 10\text{rad/s}$

Για το πλάτος πρέπει να βρούμε πρώτα την θέση ισορροπίας της ταλάντωσης. Οπότε σχεδιάζουμε το σώμα στη θέση ισορροπίας και παίρνουμε την συνθήκη ισορροπίας $\Sigma F = 0$.

Στη θέση ισορροπίας:



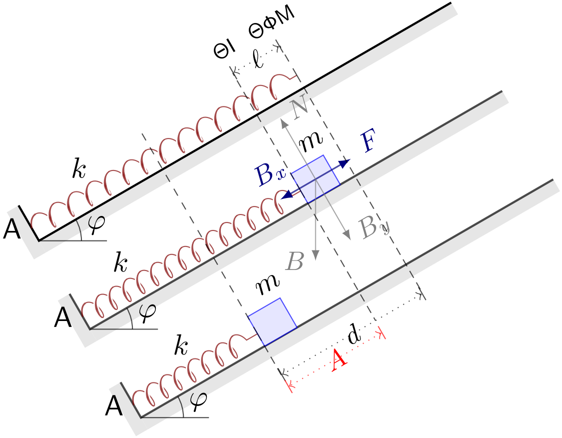
Στη θέση ισορροπίας:



$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F = B_x \Leftrightarrow k\ell = mg \Leftrightarrow \ell = 0.1\text{m}.$$

Την στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα έχει ταχύτητα $v = 0$, άρα είναι στην κάτω ακραία θέση. Επομένως

$$A = d - \ell = 0,3 - 0,1 \Leftrightarrow A = 0,2\text{m} \tag{1}$$



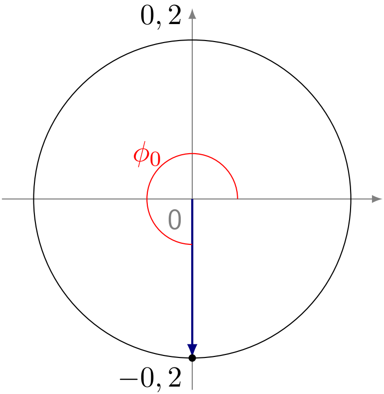
Η αρχική φάση της ταλάντωσης βρίσκεται αλγεβρικά:

Την στιγμή $t_0 = 0$ η απομάκρυνση είναι: $x_1 = -A = -0.2$m.

$$x = A\,\text{ημ}(\omega t + \varphi_0) \overset{t=0}{\iff} -0.2 = 0.2\,\text{ημ}(\varphi_0)$$

$$\text{ημ}(\varphi_0) = -1 \overset{\varphi_0<2\pi}{\iff} \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}\ \text{rad} \tag{2}$$

Ή και με το περιστρεφόμενο διάνυσμα:



Κατευθείαν $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$!

Εξίσωση ταλάντωσης:

$$x = 0,2\,\text{ημ}\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad (SI) \tag{3}$$

Β. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας, όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου (i) για πρώτη φορά (ii) για τέταρτη φορά.

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma F \cdot v \tag{4}$$

Η θέση φυσικού μήκους βρίσκεται σε απομάκρυνση (από τη ΘΙ)
$x_1 = +\ell = +0,1\mathrm{m}$
Πρέπει να υπολογίσουμε την ταχύτητα v_1 στη θέση αυτή, άρα με ενέργειες ταλάντωσης:

$$K + U = E \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kA^2$$
$$mv_1^2 + kx_1^2 = kA^2 \Leftrightarrow v_1^2 = 100(0.2^2 - 0.1^2)$$
$$v_1 = \pm\sqrt{3}\,\mathrm{m/s} \tag{5}$$

Όταν διέρχεται από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου για πρώτη φορά τότε κινείται προς τα πάνω άρα $v_1 = \sqrt{3}$ και

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = -kx_1v_1 = -100 \cdot 0.1 \cdot \sqrt{3} = -10\sqrt{3}\,\mathrm{J/s} \tag{6}$$

Όταν διέρχεται για τέταρτη φορά τότε κινείται προς τα κάτω άρα $v_1 = -\sqrt{3}$ και

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = -kx_1v_1 = -100 \cdot 0.1 \cdot (-\sqrt{3}) = +10\sqrt{3}\,\mathrm{J/s} \tag{7}$$

Την χρονική στιγμή $t = \frac{5\pi}{60}$ s το σώμα m_1 συγκρούεται πλαστικά με κατερχόμενο σώμα μάζας $m_2 = 1\,\text{kg}$, το οποίο έχει ταχύτητα $v_2 = 1\,\text{m/s}$.
Γ. Να βρεθεί το νέο πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Πρέπει να βρούμε την ταχύτητα του σώματος m_1 αλλά και την απομάκρυνσή του, την στιγμή της σύγκρουσης.

Από την εξίσωση ταχύτητας ($v_{max} = \omega A = 2\,\text{m/s}$) έχουμε:

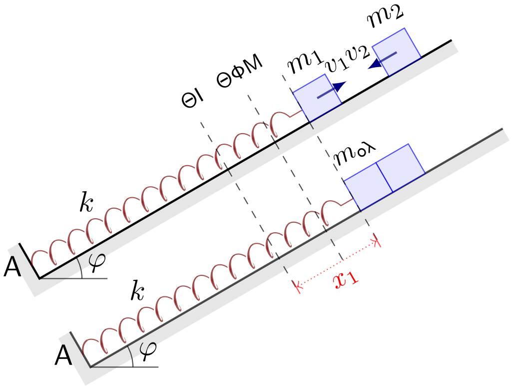
$$v = v_{max}\,\text{συν}(\omega t + \varphi_0) \Leftrightarrow v_1 = 2\,\text{συν}\left(10\frac{5\pi}{60} + \frac{3\pi}{2}\right)$$
$$v_1 = 2\,\text{συν}\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{9\pi}{6}\right) \Leftrightarrow v_1 = 2\,\text{συν}\left(\frac{14\pi}{6}\right)$$
$$v_1 = 2\,\text{συν}\left(\frac{12\pi}{6} + \frac{2\pi}{6}\right) \Leftrightarrow v_1 = 2\,\text{συν}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$v_1 = 1\,\text{m/s} \tag{8}$$

Για να βρούμε την απομάκρυνση του σώματος m_1 την στιγμή της σύγκρουσης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την διατήρηση της ενέργειας ταλάντωσης, ή την εξίσωση της απομάκρυνσης:

$$\begin{aligned} x = 0,2\,\text{ημ}\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x_2 = 0,2\,\text{ημ}\left(10\frac{5\pi}{60} + \frac{3\pi}{2}\right) \\ x_2 = 0,2\,\text{ημ}\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x_2 = 0,2\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x_2 = 0,1\sqrt{3}\,\text{m} \end{aligned} \tag{9}$$

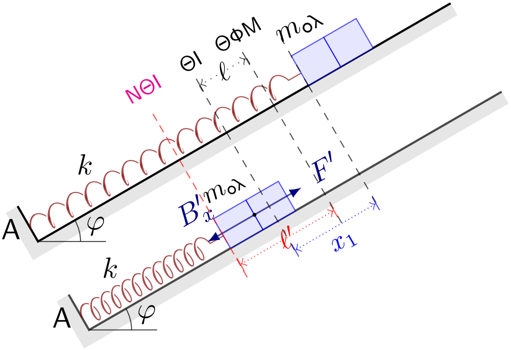
Και τελικά με την διατήρηση της ορμής:

$$m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)v_\sigma \Leftrightarrow 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 2v_\sigma$$
$$v_\sigma = 0 \tag{10}$$



Επομένως το συσσωμάτωμα ακριβώς μετά την κρούση έχει ταχύτητα μηδέν. Άρα βρίσκεται στην (πάνω) ακραία θέση.

Όμως η θέση ισορροπίας του συσσωματώματος είναι παρακάτω από τη θέση ισορροπίας του σώματος m_1. Και πρέπει να τη βρούμε ώστε να υπολογίσουμε το νέο πλάτος A'.



$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F' = B'_x \Leftrightarrow k\ell' = (m_1 + m_2)g \Leftrightarrow \ell' = 0,2\text{m}$
Επομένως $A' = (\ell' - \ell) + x_1 \Leftrightarrow A' = 0,2 + 0,1\sqrt{3}\,\text{m}$